Serrada di Folgaria, 6-7 settembre 2001

Corso di autoaggiornamento docenti di filosofia e fisica del Liceo "Quadri"

Misure della realtà

Perché la realtà è descrivibile matematicamente?

Paolo Vidali

1. Il mondo antico

Pasa kynesis atelès, ogni movimento è sintomo di imperfezione (Aristotele, *Metaphys.*, IX, 1048 b 28 e *Phys*., III, 201b 30).

Nonostante lo sforzo straordinario e fecondo con cui Aristotele tentò comunque una "fisica", cioè una teoria razionale del divenire, questo presupposto greco e medievale influenzò profondamente tutta la cultura scientifica antica. Dell'essere e non del divenire era possibile una vera scienza.

Certo esisteva un movimento "perfetto", quello celeste, eterno, costante, "stabile" e appunto in forza di ciò descritto matematicamente.

Ma è un'ontologia precisa a rendere possibile questa operazione: quello circolare è un moto eterno e "immobile" proprio di una sostanza , l'etere, strutturale al mondo celeste

Il divenire terrestre, invece, fatto di corruzione, trasformazione, distruzione e generazione, rimaneva affidato a un altro schema, che proprio Aristotele inventò, quello della potenza e dell'atto. Due mondi, due movimenti, due strumenti razionali di descrizione, pur nel quadro profondamente unitario di una concezione filosofica capace di resistere per 18 secoli.

2. La novità del moderno

E' con Galilei che il progetto di una matematizzazione del divenire terrestre, cioè di tutta la realtà naturale, diventa possibile ma anche praticato. Ne consegue la domanda su cui ancora oggi riflettiamo: *perché la matematica è efficace nella fisica?*[1]

Nel mondo moderno sono tre le presenti, e tali sono anche in epoca contemporanea, cioè più o meno trecento anni dopo che sono state formulate, tre posizioni che rappresentano un modello di risposta, Ovvero:

1) *la risposta di G. Galilei* (1564-1642): la matematica nella fisica è efficace perché vi è una stretta omogeneità fra il mondo indagato dalla fisica e la matematica: è la tesi realista o naturalista
2) *la risposta di G. Berkeley* (1685-1753): la matematica è efficace solo perché è un buon strumento e nulla più: è la tesi strumentalista
3) *la prima risposta di I. Kant* (1724-1804): la matematica è efficace perché noi costituiamo il mondo in modo matematico e perché solo grazie alla matematica riusciamo a costruire concetti di oggetti di cui non abbiamo esperienza diretta: è la tesi costruttivista (o strutturalista).

Entriamo nel merito delle risposte moderne

[1] Si veda ad esempio il citato ma discutibile saggio di E. Wigner (1960), "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences".

2.1. Galilei e la tesi realista

Perché, ci potremmo chiedere, è così importante descrivere la realtà fisica usando il linguaggio della matematica? A questa domanda Galilei fornisce delle risposte, non sempre degli argomenti.

La prima viene da un passo famoso:

> «La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico lo universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, a conoscer i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto» (*Il Saggiatore*, 1623, in *Opere*, vol. VI, p. 295).

Utilizzando la grande metafora rinascimentale del libro Galilei sostiene qualcosa di più della leggibilità del mondo e quindi della fiducia in una capacità conoscitiva umana. Egli afferma che il linguaggio matematico è primitivo, originario, omogeneo alla natura. Ma sa altrettanto bene che la capacità umana di produrre matematica non deriva dalla sensibilità, non dipende da un'intuizione metafisica, né discende da una rivelazione divina. E' una competenza umana, la più divina delle competenze umane.

Simplicio, nella prima giornata del *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (1632) muove una fondamentale obiezione: il mondo, specie quello terrestre, è impreciso e "sporco", il che rende impossibile applicagli la purezza della dimostrazione matematica. Galilei gli risponde "ma dirò bene con Aristotile che nelle cose naturali non si deve sempre ricercare una necessità di dimostrazione matematica" (G. Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, 1632, in op. cit., vol. VII, p. 38). Non è nel mondo che si deve ricercare l'esattezza matematica. Siamo allora in presenza di una contraddizione? No. Nel mondo non si devono ricercare "triangoli, cerchi, ed altre figure", ma per "leggerlo" bisogna conoscere queste figure "il voler trattar le quistioni naturali senza geometria è un tentar di fare quello che è impossibile ad essere fatto" (Ivi, p. 229)

Infatti, "quando il filosofo geometra vuol riconoscere in concreto gli effetti dimostrati in astratto, bisogna che difalchi [cioè tolga] gli impedimenti della materia; che se ciò saprà fare, io vi assicuro che le cose si riscontreranno non meno aggiustatamente che i computi aritmetici" (G. Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, 1632, in Opere, vol. VII, p. 234). Ecco: la matematica è efficace non perché nel mondo ci siano "triangoli, cerchi, e altre figure", ma perché il fisico (il filosofo geometra) toglie via al particolare che sta osservando tutto quello che lo fa tale e ne considera in astratto la struttura geometrica.

Sarà Cartesio che per primo, a partire da questa struttura geometrica, ridisegnerà la stessa ontologia materiale, cioè la *res extensa*. Il problema dell'applicazione della matematica alla realtà viene correttamente risolto solo riformulando un'ontologia adeguata a questa applicazione. Un classico lavoro da filosofo.

2.2. Berkeley e la tesi strumentalista

La risposta di Berkeley alla domanda sul perché la matematica sia efficace all'interno della fisica è espressa nel *Trattato dei principi della conoscenza umana* del 1710, in cui spiega che la matematica è solo uno strumento interamente volto a fini pratici.

Questa soluzione strumentalista non può, tenendo conto dei fini apologetici di Berkeley, che ruotare attorno a un preciso ruolo di Dio e della sua potenza. Berkeley vede la natura attraverso il linguaggio divino, le cui regole grammaticali sono le correlazioni tra le idee. Ma, si noti, è una grammatica e quindi un linguaggio che Dio potrebbe cambiare a suo piacimento e che quindi il filosofo della natura deve cercare di non ipostatizzare una volta che è riuscito a comprenderne un frammento. Ora il soggetto della conoscenza umano percepisce idee e tenta di raccordarle in modo da creare una sorta di uniformità che poi gli permette la scienza e quindi la previsione.

Da questo punto di vista le correlazioni fra le idee, cioè le leggi scientifiche, sono del tutto arbitrarie e soggiacenti alla volontà di Dio. Nonostante questa instabilità, il soggetto della conoscenza umano deve cercare di scoprirle, oltre che per fini estetico-religiosi, per poter vivere (Ivi, § 59, p. 100).

Insomma la conoscenza della natura ha per Berkeley solo fini pragmatici ed è una conoscenza che tenta di capire il linguaggio divino e che, sempre per fini pratici, poi tenta di riscrivere in termini matematici.

Ecco perché la matematica è efficace per la descrizione fisica del mondo. La matematica, infatti, altro non è che uno strumento che permette di rendere efficiente, e quindi tale da permetterci di vivere meglio, il modo in cui congetturiamo Dio abbia correlato le idee. Essa non ha nessun valore conoscitivo intrinseco, nel senso che non rimanda ad altro che a se stessa, ma è solo uno strumento che costruiamo e che cerchiamo di usare quando e come serve.

Necessità e universalità dimostativa sono doppiamente inficiate: una necessità non c'è, se Dio è libero di cambiarla; l'universalità, da parte sua, si riduce a semplice esito induttivo, senza nessun fondamento che non sia abitudine.

La tesi strumentalista, a ben vedere, è assimilabile a quella empirista o naturalista, quella cioè di chi ritiene che la matematica sia generata dal rapporto con l'esperienza, dalla interazione con un ambiente che ha affinato e reso adatto allo scopo uno procedura inferenziale articolata come quella matematica di produzione di inferenze empiricamente. In entrambi i casi è l'utilità del rapporto con la natura attraverso l'uso della matematica a giustificarne il successo applicativo.

2.3. Kant e la tesi costruttivista

La posizione di Kant è comprensibile solo tenendo conto di una premessa, che è poi una ridefinizione del nostro problema: la matematica non ha, per Kant, una genesi empirica né la sua applicazione ha una giustificazione *in Deo*, eppure essa è applicabile alla realtà naturale, come mostra il successo della fisica newtoniana: come e perché questo è possibile?
Possiamo sintetizzare la posizione di Kant in tre passaggi:

1) le intuizioni pure di spazio e tempo
Ogni volta che percepiamo un oggetto, lo spazializziamo e lo temporalizziamo applicando ad esso le due intuizioni pure di spazio e tempo. Queste intuizioni sono pure, cioè indipendenti dall'esperienza, e anche per questo possiedono quella universalità e necessità che ritroviamo nella geometria e nella matematica. Infatti la prima elabora una scienza dello spazio, la seconda del numero, che dipende, alla sua origine, dalla nozione di successione, cioè da una articolazione dell'intuizione pura tempo.

2) Le strutture trascendentali e i principi puri dell'intelletto
Con la batteria di strutture trascendentali (intuizioni, schemi, categorie, Io penso) diventa possibile formulare quei giudizi sintetici a priori che, a ben vedere, rappresentano proprio i principi della fisica moderna. Kant li enuncia sotto il nome principi puri dell'intelletto, cioè principi a priori della possibilità dell'esperienza, e li articola, seguendo la quadripartizione delle categorie, in quattro classi. Sono:

1) gli Assiomi dell'intuizione ("tutte le intuizioni sono quantità estensive"), che spiegano come mai percepire un oggetto significa concepirlo con una estensione misurabile;
2) le Analogie della percezione ("in tutti i fenomeni il reale che è oggetto della sensazione ha qualità intensiva, cioè un grado") che spiegano perché vi siano gradi diversi nella percezione;
3) le Analogie dell'esperienza, il cui principio è "L'esperienza è possibile soltanto mediante la rappresentazione di una connessione necessaria delle percezioni", che così si tripartiscono:
   a) Prima analogia: in ogni cangiamento dei fenomeni la sostanza permane e la quantità di essa non aumenta né diminuisce;
   b) Seconda analogia: tutti i cangiamenti avvengono secondo la legge del nesso di causa ed effetto

c) Terza analogia: tutte le sostanze, in quanto possono essere percepite nello spazio come simultanee, sono fra loro in un'azione reciproca e universale

4) i Postulati del pensiero empirico, che regolano il possibile, il reale e il necessario riferiti all'esperienza.

Riflettendo sulle tre analogie dell'esperienza e riconoscendo la loro forte parentela con alcune leggi della meccanica newtoniana (rispettivamente, principio di conservazione della massa; seconda legge della dinamica - la forza è la causa delle variazioni di velocità descritte dall'accelerazione -; terza legge della dinamica - ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria -), ci si rende conto che in modo consistente viene raggiunto l'obiettivo che Kant si era prefissato: "le leggi non esistono nei fenomeni, ma solo relativamente al soggetto a cui i fenomeni ineriscono".[2] Le leggi della natura trovano la loro universalità e necessità all'intelletto, che contribuisce a costruire l'esperienza proiettando in essa la regolarità naturale.

3) i principi metafisici della scienza della natura

La fisica pura ha la necessità di trattare con oggetti senza averne un'intuizione empirica: ciò è realizzabile solo costruendo i loro concetti, cosa possibile solo grazie alla matematica. Ossia, la matematica è efficace nella fisica pura perché solo grazie ad essa si possono costruire concetti di oggetti di cui non si ha esperienza.

In fondo, con il linguaggio e all'interno del suo sistema, Kant sta dicendo esattamente quello che direbbe un fisico teorico contemporaneo: fare fisica teorica significa rappresentare concettualmente oggetti a prescindere dalla loro eventuale empiricità. E questo, anche nella fisica teorica contemporanea, è permesso solo dalla matematica.

Posto che la matematica permette di costruire i concetti di oggetti fisici senza averne un'intuizione, bisogna però capire come ciò sia attuato. Ebbene, la "possibilità di una dottrina matematica della natura" è permessa dai "principi della *costruzione* dei concetti", ossia proprio dai primi principi metafisici della scienza della natura, i quali ci dicono come applicare la matematica a questioni di fisica pura e quindi come costruire i concetti di oggetti senza che di questi si abbia esperienza. Ed è proprio per questo che ogni fisico teorico (filosofo della natura) è, per Kant, un metafisico:

> "tutti i filosofi della natura che hanno voluto procedere in modo matematico nelle loro ricerche, si sono serviti e hanno dovuto servirsi (anche se inconsciamente) di principi metafisici […]. Così dunque quei fisici matematici non potevano fare a meno dei principi metafisici" (I. Kant, *Primi principi metafisici della scienza della natura*, 1786, Piovan Ed., Abano Terme 1989, p. 40).

3. Questioni moderne e contemporanee nella filosofia della matematica

Le tre posizioni che abbiamo abbozzato si intrecciano con le attuali filosofie della matematica e con i problemi che esse incontrano nella risposta alla domanda: perché la matematica funziona nella fisica? Sentiamo un possibile e sintetico quadro della questione.

> "Nell'ambito di una concezione **platonista** - in cui la matematica è considerata piuttosto come il frutto della scoperta di fatti astratti e indipendenti da noi che come una nostra invenzione - risulta invece difficile spiegare come si possa entrare in contatto conoscitivo con tale regno di entità astratte, che per definizione è causalmente inerte. E anche se evitassimo di presupporre che "conoscere" implichi necessariamente interagire causalmente (in modo più o meno diretto) con l'entità conosciuta, il platonismo matematico sembra in ogni caso duplicare i problemi da risolvere. Rimarrebbe infatti da spiegare perché il mondo fisico - che, in quanto spazio-temporalmente esteso, è certo altra cosa rispetto al mondo astratto della matematica - dovrebbe "rispecchiare" le strutture essenziali di quest'ultimo.
> Anche invocando una spiegazione **empirista** o **naturalistica** dell'applicabilità di certe strutture matematiche, che potrebbero essere il frutto evolutivo del lungo adattamento del cervello umano a oggetti di dimensioni compatibili a quelle del nostro corpo, resterebbe in ogni caso da chiarire perché tali

[2] I. Kant, *Critica della Ragion pura* [1787^2], trad. it. Laterza, Bari 1972, Analitica trascendentale, Lib. I, cap. II, Sez. II, § 26, p. 153.

strutture si siano rivelate indispensabili anche nell'indagine di entità molto più piccole e molto più grandi di noi (dalle particelle subatomiche fino all'intero universo osservabile.
All'interno di una filosofia **costruttivista**, si tratta per esempio di spiegare perché la matematica - vista come una nostra creazione - ci permetta di scoprire proprietà ed entità appartenenti a un mondo che, come quello fisico, non è certo stato creato da noi"[3]

4. La ridefinizione del problema: la nozione di misura

Utilizziamo allora una classica operazione filosofica, quella di valutare e ridefinire i termini del problema, cercando, cartesianamente di non accettare mai per vera nessuna cosa che non si riconosca tale con evidenza (I regola) e di fare ovunque enumerazioni così complete da essere sicuro di non omettere nulla (IV regola).

1) Non tutto si misura, ma solo ciò che è osservabile e sottoponibile a quantificazione discreta.

Qui si ritrova il problema della definizione delle qualità primarie che, nel corso della filosofia e della scienza dal '600 in poi, sono definite in modo circolare come quelle proprietà aventi caratteri stabili tali da poter essere descritte matematicamente: In un passo de *Il Saggiatore* (1623)[4] Galileo ne dà un elenco preciso: figura, grandezza, spazio, tempo, moto, numero sono qualità primarie, oggettive, cioè pertinenti al corpo in modo indipendente dall'osservazione. Nasce quella distinzione tra qualità primarie e qualità secondarie dei corpi, così chiamata da Boyle (1627-1691) e ripresa poi come distinzione tra qualità oggettive e soggettive da Locke. E' una distinzione centrale, perché solo questo genere di affezioni può essere descritto in forma matematica: non le sostanze aristoteliche, non i sapori o gli odori, ma solo le qualità primarie dei corpi possono essere descritte nel linguaggio della matematica.

Come si vede siamo in una interessante circolarità: solo le qualità primarie sono descrivibili matematicamente, ma se ci si chiede perché, la risposta è che solo queste qualità hanno i caratteri per poter essere descritte matematicamente.

Al di là di questo resta il nostro primo punto: non tutta la realtà è sottoponibile a descrizione matematica: lo è solo quella parte dotata di stabilità necessaria per essere associata ai termini della espressione matematica di cui è interpretazione.

2) Che cosa misuriamo quando misuriamo? Misuriamo oggetti fisici, oppure eventi, o proprietà, o grandezze, o quantità? Già questa esplicitazione dovrebbe rendere immediatamente perspicuo il motivo per cui la domanda iniziale non è banale.

Dobbiamo scartare anche l'idea che misuriamo oggetti non appena ci accorgiamo che misuriamo masse, lunghezze, cariche, spin, resistenze, ecc. Ma nessuna di queste cose è un oggetto. Caso mai, può essere considerata come una proprietà di un oggetto. **Si misurano proprietà di oggetti fisici,** ossia ciò che chiamiamo anche *grandezze*.

A proposito delle proprietà, giova ricordare un'importante riflessione di H. Helmholtz:

---

[3] M. Dorato, *Il software dell'universo*, B.Mondadori, Milano 2000, pp. 69-70 L'ordine delle frasi è stato cambiato per simmetria con lo schema del paragrafo precedente.

[4] Io dico che sento ben tirarmi della necessità, subito che concepisco una materia o sostanza corporea, a concepire insieme ch'ella è terminata e figurata di questa o di quella figura, ch'ella in relazione ad altre è grande o piccola, ch'ella è in questo o quel luogo, in questo o quel tempo, ch'ella si muove o sta ferma, ch'ella tocca o non tocca un altro corpo, ch'ella è una, poche o molte, né per veruna imaginazione posso separarla da queste condizioni; ma ch'ella debba essere bianca o rossa, amara o dolce, sonora o muta, di grato o ingrato odore, non sento farmi forza alla mente di doverla apprendere da cotali condizioni necessariamente accompagnata: anzi, se i sensi non ci fussero scorta, forse il discorso o l'immaginazione per se stessa non v'arriverebbe già mai. Per lo che vo io pensando che questi sapori, odori, colori, etc., per la parte del suggetto nel quale ci par che riseggano, non sieno altro che puri nomi, ma tengano solamente lor residenza nel corpo sensitivo, sì che rimosso l'animale, sieno levate ed annichilate tutte queste qualità; tuttavolta però che noi, sì come gli abbiamo imposti nomi particolari e differenti da quelli de gli altri primi e reali accidenti, volessimo credere ch'esse ancora fussero veramente e realmente da quelli diverse. Galilei, *Il Saggiatore*, 1623, in *Opere*, Edizione Nazionale, Barbera, Firenze 1890-1909, vol. VI. p. 327.

"Ogni proprietà o qualità di una cosa non è in realtà nient'altro che la capacità di esercitare certe azioni su altre cose [...] Un'azione di tal genere è da noi chiamata proprietà quando il reagente con cui si manifesta è da noi tenuto presente come ovvio nel pensiero, senza essere nominato. Così noi parliamo della solubilità di una sostanza, che è il suo comportamento rispetto all'acqua; parliamo del suo peso, che è l'attrazione da essa subita verso la Terra; e parimenti la diciamo azzurra in quanto viene presupposto come ovvio che con ciò si tratta d'indicare soltanto la sua azione su di un occhio normale. Ma se ciò che noi chiamiamo proprietà indica sempre e soltanto una relazione fra due cose, una tale relazione non può dipendere dalla sola natura della cosa agente, ma esiste esclusivamente in relazione con la natura di una seconda cosa, che subisce l'azione, e da questa natura dipende" (Helmholtz, 1868, p. 321).

Secondo il contenuto di questo passo, una *proprietà* P *che abbia un qualche interesse almeno per la scienza* è qualcosa che dà luogo a un evento rivelabile che è prodotto da una interazione dell'oggetto fisico O di cui essa si predica con un secondo ben determinato oggetto fisico O', ossia con quello che permette, o stimola il verificarsi dell'evento E. Per cui se vogliamo, ad esempio, misurare la carica (la proprietà P) di una particella (l'oggetto O), dobbiamo fare interagire quest'ultima con un'altra particella carica, o con un campo elettrico o magnetico (l'oggetto O'): solo l'interazione con un tal tipo di oggetto O' dà luogo all'effetto E che viene rivelato (ad es., l'accelerazione della particella O).

La misura è quindi un'interazione tra proprietà: non è una caratteristica assoluta, ma relazionale. Il che ci porta al terzo punto

3) Va osservato che la misura **è sempre un'approssimazione a valori stabiliti come accettabili**. Il battito del polso per Galileo non equivale all'intervallo temporale ammesso nella misura di fenomeni fisici odierni. Ed anche oggi, comunque, il valore misurato è sempre una media dei valori rilevati dalle diverse misurazioni. La realtà misurata non è mai, quindi, docile alla misura. Solo l'accettazione - puramente storico-sociale- dei valori ammessi produce l'accettazione del risultato di misura. (Vedi il caso di Keplero e del calcolo dell'orbita di Marte).

4) Per misurare serve allora una teoria della relazione tra proprietà , cioè un corpus stabile di teorie dell'interazione tra osserva(n)ti: non serve misurare la temperatura dell'aria per stabilire l'accelerazione di un grave. Se voglio misurare la velocità di un grave devo possedere una efficace teoria delle interazioni fondamentali tra gli elementi oggetto di misura (massa, direzione, spazio percorso, tempo…) e tra questi elementi e i miei strumenti di misura (bilancia, metro, cronografo, …) Scegliere i parametri significativi da misurare è altrettanto rilevante che operare delle misure tecnicamente buone.

Più in generale dietro ad ogni misura serve un definito corpus di teorie sia dei parametri significativi per la misura da effettuare, sia dell'interazione tra strumento di misura e osservato.

Tenendo conto di tutto questo posiamo capire perché, come dice Bonicelli, un biologo, non tutta la scienza fa uso della matematica nello stesso modo: "il grosso della biologia non fa al momento alcun uso della matematica […] nelle grandi linee alcuni meccanismi sono noti, ma non si può certo ancora pensare di passare ad una fase di descrizione rigorosa o di matematizzazione … non si riesce ancora a vedere, oggi come oggi, in che cosa la matematica potrebbe dare una mano, sia per suggerire una teoria che per svilupparla."[5].

Quindi è una realtà selezionata quella che viene matematizzata, in quanto da un lato è selezionata come proprietà misurabile e non solo osservata, dall'altro è messa in rapporto con altre proprietà di cui possediamo accettate teorie di interazione descrittiva, quindi è trattata matematicamente per evitare la variabilità dei risultati, ammettendo un margine d'errore accettabile. Molta della nostra realtà sotto indagine scientifica non soddisfa alcuni e talvolta tutti questi requisiti.

[5] Bonicelli E., Bottazzini U., *La serva padrona: fascino e potere della matematica,* Cortina, Milano 2000, p. 205

5. Il rapporto tra matematica e interpretazione fisica

Il rapporto ta matematica e indagine fisica sembra, a prima vista, proporsi come una sorta di shopping: Einstein prende il calcolo tensoriale di Ricci e Levi-Cività per la relatività generale; von Neumann prende lo spazio di Hilbert per il suo lavoro sui fondamenti della meccanica quantistica; Weyl e Wigner prendono la teoria dei gruppi di Lie per i loro lavori di fisica teorica. Tutti questi usano una matematica prefabbricata nel senso che è stata costruita prima della teoria fisica in cui poi viene usata. Addirittura vi sono casi in cui essa è disponibile già da secoli senza che mai nessuno si fosse accorto della sua validità: è il caso emblematico della teoria delle sezioni coniche proposta da Apollonio di Perga nel III sec. a. C. e usata da J. Keplero nel XVII sec. d. C.

D'altro canto non vi è solo la possibilità che il fisico utilizzi una matematica prefabbricata, ma anche che egli stesso costruisca la matematica che gli serve. E' il caso di Dirac che introduce la pseudo-funzione δ per risolvere il problema dello spettro continuo in meccanica quantistica o il caso di R.P. Feynmann e dei suoi diagrammi fatti per visualizzare, ma anche per formalizzare, come ha mostrato Dyson, le interazioni in elettrodinamica quantistica.

Ma questo rapporto nn è così lineare come semba a prima vista

5.1 La matematica prima della realtà

Esistono molti **esempi di strutture matematiche a cui si assegna successivamente un significato fisico** o un valore tecnologico[6]:

- le ellissi di Keplero, che applica le coniche (III sec. a.C.) alle orbite dei pianeti nella sua prima legge: venti secoli dopo uno strumento matematico si mostra utile per descrivere il comportamento di uno degli oggetti a maggiore regolarità.
- Nel 1892 A.H. Lorentz introduce un nuovo sistema di trasformazione di coordinate per risolvere l'aporia secondo cui la meccanica classica era invariante per trasformazioni galileiane, mentre non lo era l'elettromagnetismo classico. Dapprima le nuove trasformazioni sono considerate solo come strumento matematico, ma poi Lorentz arriva, nel 1895, ad attribuire loro un significato fisico.
- l'antimateria: Dirac concepì un'equazione della meccanica quantistica che fosse compatibile con la fisica relativistica, prevedendo stati di energia negativa per gli elettroni e particelle fino ad allora non contemplate: da qui si giunse alla scoperta del positrone.
- Gli spazi di Hilbert. Si tratta di spazi in cui i punti sono in corrispondenza biunivoca con una certa classe di operazioni matematiche: furono uno strumento essenziale per la formalizzazione della meccanica quantistica.
- La geometria reimanniana e i tensori: grazie a questa geometria non euclidea Einstein formulò la teoria della relatività generale, mostrando come la massa-energia è in grado di distorcere lo spazio-tempo, cosa non descrivibile entro la geometria euclidea; inoltre le proprietà dei tensori (grazie al matematico Michael Grossmann) vennero usate per garantire che le leggi di natura formulate in linguaggio tensoriale avrebbero conservato la loro forma qualunque fosse lo stato di moto dell'osservatore
- I gruppi, cioè l'insieme delle variazioni che lasciano invariato qualcosa (legge o oggetto matematico) sono una teoria algebrica molto usata non solo nello studio della simmetria dei cristalli, ma nella geometria fisica e nella fisica delle particelle
- Anche grazie alla logica di Russell maturò la teoria delle funzioni ricorsive e della calcolabilità che, grazie ai lavori di Turing e Church, sta alla base del funzionamento degli odierni calcolatori.

---

[6] Per un elenco vedi Barrows, *Teorie del tutto*, [1991], CDE Milano 1998, 340 ss.

5.2. La realtà fisica prima della matematica

Vi sono anche **esempi di problemi fisici che hanno determinato la nascita di strutture matematiche:**

- Il calcolo infinitesimale di Newton, ideato per trattare meglio le curve e per descrivere la velocità istantanea di un corpo in movimento
- La serie infinitesimale di Fourier, ideata a partire dallo studio dell'ottica ondulatoria e del flusso di calore
- Le funzioni generalizzate di Heaviside e Dirac per descrivere le forze impulsive istantanee
- La nozione di attrattore strano, ideata per comprendere i liquidi turbolenti
- La teoria fisica delle superstringhe, per cui molti ritengono che non esista ancora un adeguato supporto matematico, a cui tuttora si sta lavorando.

Ma trovare casi a sostegno di un'interpretazione non comporta nulla.

Trovare una o più occorrenze in cui si mostra che la matematica è stata in grado di produrre risultati a cui solo successivamente si è assegnato un significato fisico, o trovare casi che dimostrano l'opposto, sono solo esemplificazioni, induzioni da pochi casi che tentano, in modo fallace, di indurre generalizzazioni che non possono sostenere. Un caso può essere sufficiente solo a smentire una teoria generale, non a costituirla. Quindi, per la rassegna fatta, abbiamo casi sufficienti a smentire entrambe le tesi, quella di una matematica in grado di produrre risultati fisicamente significativi e quella di una fisica in grado di produrre la matematica che le serve. *Entrambe le tesi sono, logicamente, false.*

6. Le tesi in gioco e le loro ragioni

6.1 La tesi realista

La tesi realista afferma l'indipendenza ontologica e l'autonomia conoscitiva del mondo matematico rispetto a quello reale. L'esempio più significativo di questo platonismo della matematica è Frege, rivisitato e reinterpretato oggi da un bel libro di Piazza *Intorno ai numeri*, o riaffermato da A. Connes anche nel suo ultimo *Triangolo dei pensieri.* I problemi che incontra questo approccio derivano dall'accordo tra mateamtica e realtà ad essa indipendente. O si ammette un Dio che lo garantisca, come in fondo facevano Galileo o Keplero, o si ammette una struttura fine della materia di tipo matematico, non diversa, come ipotesi, dall'etere che permetteva l'applicazione della matematica perché era strutturalmente stabile. E poi, come si chiede Changeux,[7] se la matematica fosse il principio organizzatore della materia, si dovrebbe prima o poi trovare un adeguamento perfetto tra regolarità degli oggetti fisici e regolarità degli oggetti materiali: ma così, per la teoria dell'errore, non è mai.

6.2 Avvicinamenti alla svolta linguistica

Il Novecento ha messo in campo una teoria forte, quella per cui non è la realtà ad essere oggetto della nostra conoscenza o delle nostre descrizioni, ma sempre il nesso tra realtà e linguaggio: L'essere, che può essere compreso, è linguaggio. Così si esprime esemplarmente Gadamer, mostrando che possiamo misurarci solo con una realtà linguisticizzata (ma ha poi senso questo attribuito? Che cos'è una realtà non linguisticizzata?)

In questa prospettiva anche il problema che del rapporto tra matematica e realtà assume una veste diversa. Facciamolo per avvicinamenti progressivi

[7] Connes A., Changeux J-P, *Pensiero e materia* [1989], Bollati Boringhieri, Torino 1991, p. 49

6.2.1. La tesi dell'uso (uno strumentalismo più raffinato)

Un passo in questa direzione viene dalla tesi del Wittgenstein delle *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica*. Egli ritiene che il contare sia un'attività umana, un esercizio infinito (§4 p. 7) "Ma allora questo contare è solo un uso? A questa successione non corrisponde anche una verità?" - La *verità* è che questo contare ha dato buoni risultati - "Vuoi dire che essere vero significa essere utilizzabile (essere utile)?" - No, voglio solo dire che della successione naturale dei numeri - così come del nostro linguaggio - non si può dire che è vera, ma soltanto che è utile e, innanzi tutto, che *viene impiegata*" (ivi)

Qui in gioco c'è la nozione di verità, inarrivabile nel senso assoluto che le si attribuisce, ma anche la pratica del numerare, e quindi del descrivere matematicamente, come uno strumento per vivere e adeguare il proprio comportamento al mondo e al mondo degli altri.

Si tratta di una tesi non perfetta, nel senso che il rapporto tra matematica e realtà è visto in modo strumentale, adattato, parziale, fino a dove la pratica lo consente, non immolandola al servizio della necessità inferenziale di tipo deduttivo. Qualcosa della matematica sfugge, ma averla ricondotta alla pratica serve ad aprire una strada diversa dallo srumentalismo o dal convenzionalismo, in cui si dava comunque un rapporto con la realtà diverso da quello offerto dalla mediazione matematica.

Qui l'uso della matematica non deriva dal rapporto con la realtà ma dall'uso di un linguaggio, di un gioco linguistico particolarmente diffuso e condiviso. Qui è in discussione la relazione di scambio del linguaggio matematico con altri più che la sua ontologica corrispondenza con il mondo. D'altro canto, è la stessa tesi neoempirista, che si riferisce non alla natura ma a ciò che possiamo dire della natura, e che si proietta nella tesi di van Fraassen per cui il rapporto tra scienza e natura è irrimediabilmente mediato dalla nostra immagine di natura, l'immagine scientifica appunto.

6.2. 2. La tesi dell'indipendenza

Perché i calcoli della logica e della aritmetica sono applicabili alla realtà? E' questo il titolo di un saggio di Popper in *Congetture e confutazioni*. La sua risposta è singolare. Lo sono in quanto non sono calcoli, ma descrizioni. Se restano tali, cioè leggi logiche o calcoli del tipo 2+2=4, non possono venir confutati il che vuol dire non sono empirici: quindi non si applicano alla realtà.[8] 2+2 fa sempre 4, ma se mettiamo due conigli maschi più 2 conigli femmine in un sacco, dopo un po' difficilmente ne escono solo 4 conigli; se mettiamo 2+2 gocce d'acqua dentro un fiasco asciutto non ne possiamo più togliere 4 gocce. L'interessante di questa posizione, che rende del tutto indipendenti la verità della matematica e della logica da quella della scienza naturale, è la conclusione a cui Popper approda. Una difficoltà, infatti, restava non chiarita dalla posizione popperiana: perché, ci si può chiedere, se parlano di verità diverse, i calcoli della logica e dell'aritmetica sembrano adattarsi alla realtà fisica? La risposta di Popper apre una prospettiva che potremmo dire "kantiana": "i fatti sono in un certo senso un prodotto comune sia del linguaggio che della realtà: sono realtà fissata in osservazioni descrittive.

---

8 Giova a questo proposito ascoltare il modo con cui Popper rielabora un passaggio di Eninstein: "Allora mi rilessi da capo a fondo Einstein per vedere dove fosse possibile trovare, nella sua opera, questa conseguenza della sua rivoluzione. Ciò che trovai fu la sua conferenza *Geometrie und Erfahrung* [Geometria ed esperienza], in cui scrive: «In quanto le proposizioni della matematica si riferiscono alla realtà, in tanto non sono certe; e in quanto sono certe in tanto non si riferiscono alla realtà».Prima di tutto generalizzai questa asserzione dalla matematica alla scienza in generale:
«In quanto le proposizioni della scienza si riferiscono alla realtà, in tanto non sono certe; e in quanto sono certe in tanto non si riferiscono alla realtà».[…] Più tardi a quest'idea, secondo cui tutte le teorie umane sono incerte, o fallibili, ho dato il nome di «fallibilismo»." *I due problemi fondamentali della teoria della conoscenza*, Introduzione 1978, 1, p. XXI.

6.2.3. La tesi costruttivista (o strutturalista)

Changeux sposa una tesi del passato, esplicitamente kantiana, quando afferma che il matematico pensa un oggetto della matematica in quanto è in grado di costruirlo. E' la stessa tesi della *Critica della ragion pura*, in cui Kant afferma che "la conoscenza matematica è conoscenza razionale per costruzione di concetti"

Ciò avviene perché, probabilmente, dal punto di vista di un biologo le strutture matematiche sono forme di simmetrie, teoria dei gruppi, topologie, curve di crescita ecc. E' una matematica ben diversa dalle equazioni differenziali, così usate in fisica, non previsionale, descrittiva e non molto predittiva, volta alla costruzione di modelli della organizzazione del vivente o della sua struttura.

Su questa base perché, allora, non cercare una definizione del linguaggio matematico che meglio si presti ad una teoria della sua applicazione variabile?

Una risposta possibile viene dalla concezione della matematica a partire dalla nozione di *pattern*, o struttura, elaborata da Resnik e Shapiro

Nella prospettiva di Benacerraf e di Quine la struttura è tutto ciò che ha valore logico-matematico: gli oggetti, sia astratti che concreti, sono nodi neutri nella struttura logica del mondo.

Negli ultimi vent'anni Michael Resnik e Stewart Shapiro hanno avanzato le loro riflessioni in questa prospettiva, descrivendo la matematica come la scienza che descrive le proprietà di tutte le relazioni che valgono all'interno delle strutture.

Ogni oggetto matematico è dunque visto in dipendenza di una struttura di sfondo: 4 è un numero quadrato o il numero dei cavalieri dell'Apocalisse non perché possiede una proprietà interna, tutta sua, ma in virtù del posto che occupa nella struttura a cui appartiene.

Gli oggetti matematici (numeri, funzioni, insiemi, vettori e così via) sono posizioni in qualche struttura. I numeri sono posizioni nella struttura numerica, l'aritmetica concerne la struttura in cui i numeri naturali sono immersi, l'analisi reale la struttura dei numeri reali, la topologia le differenti strutture topologiche… Istanti temporali (il termine stesso «successore", ha un'ineliminabile impronta temporale), ordinali di von Neumann, numerali arabi o romani, stringhe di barre: 1, 11, 111, 1111,.... punti nello spazio e progressioni acustiche, possono esemplificare (o realizzare) ugualmente bene la struttura.

Nella formulazione di Shapiro, la struttura dei. numeri naturali è la struttura (la forma) comune a ogni sistema che abbia una successione infinita di oggetti con un certo oggetto iniziale e la relazione asimmetrica e transitiva di successore. Insomma, un'Ω- successione è ciò che soddisfa gli assiomi di. Peano.[9]

Applicare la matematica consiste nello scoprire che qualcuna di queste strutture è esemplificata.

In questa prospettiva la tesi "linguistica" permette di fornire una buona metafora del perché la matematica si adatta alla realtà. Essa è la teoria di produzione e di controllo di strutture che non nascono dalla realtà né in vista della loro applicazione ad essa, ma nascono semplicemente dalla generatività propria di strutture più semplici (da qui il problema della genesi dell'aritmetica, e in generale del contare, che però, per fortuna, non ci interessa qui)

Concepita così, né platonicamente come un universo di oggetti perenni, né empiristicamente come un prodotto del nostro adattamento, la matematica diventa una struttura "linguistica", medio necessario della nostra descrizione della realtà, quando questa voglia e debba esprimersi *via mathematica* , il che non è necessario né di per sé doveroso.

Perché allora è possibile anticipare matematicamente dei risultati fisici? (Come si vede qui si pone il problema della condizione di possibilità di un risultato, non dell'induzione da una serie finita di casi di un enunciato generale)

[9] Pl 0 è un numero naturale. P2 Ogni numero naturale ha un successore che è un numero naturale. P3 0 non è il successore di alcun numero naturale. P4 Differenti numeri naturali hanno differenti successori. P5 Se una proprietà P vale per 0 e P vale anche per il successore di ogni numero per cui vale P, allora P vale per ogni numero naturale.

Perché stabiliamo di operare una descrizione della realtà (fisica) utilizzando la matematica, il che significa far attraversare tale realtà nel prisma delle strutture di cui siamo a conoscenza per la nostra scienza matematica. Così facendo "*difalchiamo*" gli impedimenti della realtà, come diceva Galileo, cioè eliminiamo quanto non rientra nel selettore della struttura; quanto invece vi entra subisce un trattamento adeguato allo strumento impiegato, il che significa che viene prolungato attraverso una funzione, una serie, in generale attraverso lo sviluppo dello studio della struttura.
Come è possibile costruire frasi corrette ma non interpretabili nel mondo reale ("Idee verdi dormono furiosamente") così è possibile generare strutture non interpretate (ancora).

7 Conclusioni

Rispondere alla nostra domanda equivale ad ipotizzare la matematica come un linguaggio di generazione di strutture applicabili alla realtà, che l'esistenza di particolari problemi consente di tradurre, ma la cui inesistenza non impedisce di continuare a trattare, esattamente come non è necessario un principe danese per scrivere l'Amleto.

Ma, per stare nella citazione, vi sono più cose in terra e in cielo che nella nostra descrizione matematica della realtà. Il che non dovrebbe scandalizzare nessuno, credo.

Ancora una volta diventa comprensibile perché la regolarità della scienza affascini e seduca la nostra teoria della conoscenza: è lo specchio in cui vediamo la generatività del nostro intelletto all'opera. E' lo specchio in cui capiamo che il linguaggio è la nostra realtà in forma comprensibile: Il nuovo problema diventa, allora, un altro. Non perché questo linguaggio sia così fertile o perché quello naturale non abbia prodotto una scienza allo stesso livello. Il nuovo problema è se, come e perché linguaggi diversi, come sono diverse le lingue naturali, l'aritmetica e la fisica quantistica, sono traducibili.

Anche in senso politico, o morale, c'è comunque un guadagno. Il problema di un'eccellenza diventa il problema di un accordo.

Bibliografia

Bonicelli E., Bottazzini U., *La serva padrona: fascino e potere della matematica*, Cortina, Milano 2000

Boniolo, Dorato (a cura di), *La legge di natura*: *analisi storico critica di un concetto*, Mc-Graw-Hill, Milano 2001

Boniolo, *Il ruolo della matematica nella fisica*, in corso pubblicazione in “Nuova Civiltà delle Macchine”, anno 2001

Castellani, *Simmetria e natura*, Laterza, Roma Bari 2000

Cellucci C. (a cura di) *La filosofia della matematica,* Laterza, Bari 1967

Connes, Lichnerowicz, Schutzenberger *Triangolo dei pensieri,* Bollati Boringhieri, Torino 2001

Connes A., Changeux J-P, *Pensiero e materia* [1989], Bollati Boringhieri, Torino 1991

Dorato M., *Il software dell'unverso*, B.Mondadori, Milano 2000

Dummett M., *Frege: Philosophy of Mathematics*, 1991

Feynman R., *La legge fisica*, [1967], Bollati Boringhieri, Torino 1996

Piazza M. *Intorno ai numeri*, Oggetti, proprietà, finzioni utili, B.Mondadori, Milano 2000

Popper K., *Congetture e confutazioni*, [1963] Il Mulino, Bologna 1972.

Resnik D. (ed) *Mathematical objects and mathematical knowledge*, Dartmouth, Aldershot 1995

Resnik, *Mathematics as Science of Patterns*, Clarendon Press, Oxford 1997

Shapiro, Stewart , *Philosophy of mathematics: structure and ontology* Oxford university Press, New York, Oxford 1997

Shapiro, Stewart, *Thinking about mathematics: the philosophy of mathematics* , Oxford University press, Oxford 2000

Van Fraassen , *Laws and Simmetry*, Oxford University Press, 1989

Van Fraassen *L'immagine scientifica*, [1980] Clueb, 1985

Wigner E., “The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences”, Communication on Pure and Applied Mathematics, 13 , 1960, pp. 1-14; anche in E. Wigner, *Symmetries and Reflections*, Indiana University Press, Bloomington 1967, pp. 222-237.

Wittgenstein L.*Osservazioni sopra i fondamenti della matematica*, [1956], Einaudi, Torino 1971

Wittgenstein L. *Lezioni di Wittgenstein sui fondamenti della matematica*: Cambridge 1939, , Boringhieri, Torino 1982